



# Operations Management

Kurzfristige Kapazitätsplanung &  
Warteschlangenmanagement





## Aufgabe 1 – Lösung/1

$$a) \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{20} = 0.75$$

$$b) L_q = \frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{0.75 \cdot 15}{20-15} = 2.25 \text{ Kundinnen}$$

$$c) L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{15}{20-15} = 3 \text{ Kundinnen}$$

$$d) W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = \frac{0.75}{20-15} = 0.15 \text{ Stunden} = 0.15 * 60 = 9 \text{ Minuten}$$



## Aufgabe 1 – Lösung/2

$$e) W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{20 - 15} = 0.2 \text{ Stunden} = 0.2 * 60 = 12 \text{ Minuten}$$

$$f) P_n = \rho^n (1 - \rho)$$

$$n = 0 \Rightarrow P_0 = \rho^0 (1 - \rho)$$

$$\Rightarrow (1 - \rho) = 0.9 \Rightarrow \rho = 0.1$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{15}{0.1} = 150 \text{ Kundinnen pro Stunde}$$



## Aufgabe 2 – Lösung/1

a) Die Ankunftsrate beträgt:  $\lambda = 30 \frac{\text{Kundinnen}}{\text{h}}$ .

Die Servicerate beläuft sich auf:  $\mu = \frac{3600 \text{ sek/h}}{20 \text{ sek/Kundinnen}} = 180 \frac{\text{Kundinnen}}{\text{h}}$ .

Was einen Auslastungsgrad von  $\rho = \frac{30 \text{ Kundinnen/h}}{180 \text{ Kundinnen/h}} = 0.167$  ergibt.

b) Daraus lässt sich die durchschnittliche Anzahl an Kundinnen im System folgendermassen berechnen:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{30}{180 - 30} = 0.2 \text{ Kundinnen}$$



## Aufgabe 2 – Lösung/2

- c) Um den Einfluss einer Veränderung der Ankunftsrate auf die Anzahl der Kundinnen im System zu ermitteln, wird die Ableitung von  $L_s$  nach  $\lambda$  gebildet. Beachten Sie dabei die Quotientenregel der Differentialrechnung:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\frac{\partial L_s}{\partial \lambda} = \frac{\partial \left( \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \right)}{\partial \lambda} = \frac{1 * (\mu - \lambda) - \lambda * (-1)}{(\mu - \lambda)^2} = \frac{\mu}{(\mu - \lambda)^2} > 0$$

Da dieser Term positiv ist, steigt die Anzahl an Kundinnen im System, wenn die Ankunftsrate steigt.



## Aufgabe 3 – Lösung/1

a) Da die Kundinnen die Warteschlange nicht wechseln können, wird mit zwei M/M/1 Modellen gerechnet. Die Ankunftsrate pro Server beläuft sich somit auf 10 Kundinnen/h.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10 \text{ Kundinnen/h}}{20 \text{ Kundinnen/h}} = 0.5$$

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{10 \text{ Kundinnen/h}}{20 \text{ Kundinnen/h} - 10 \text{ Kundinnen/h}} = 1 \text{ Kundin}$$

$$TC_{\text{Schalter}} = C_W L_s + s C_S = 15 \frac{\text{CHF}}{h * \text{Kundinnen}} * 1 \text{ Kundinnen} + 10 \frac{\text{CHF}}{h * \text{Server}} * 1 \text{ Server} = 25 \frac{\text{CHF}}{h}$$

Somit belaufen sich die Gesamtkosten auf:

$$2 * TC_{\text{Schalter}} = 2 * 25 \frac{\text{CHF}}{h} = 50 \frac{\text{CHF}}{h}$$



## Aufgabe 3 – Lösung/2

- b) Gesamtkosten ergeben sich aus den Kosten für den Schalter (in Teilaufgabe a) berechnet) sowie den Kosten für den ATM (M/G/1), welche sich wie folgt zusammensetzen:

$$TC_{ATM} = C_W L_S + s C_S$$

Die durchschnittliche Anzahl Kundinnen im System ( $L_S$ ) ergibt sich aus der Summe der durchschnittlichen Anzahl Kundinnen in der Warteschlange ( $L_q$ ) sowie der durchschnittlichen Anzahl Kundinnen in Service ( $\rho = 0.5$ ). Da der ATM über eine konstante Servicezeit verfügt, liegt die Varianz bei Null ( $\sigma^2 = 0$ ):

$$L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1 - \rho)} = \frac{0.5^2}{2(1 - 0.5)} = 0.25 \text{ Kundinnen}$$

$$L_S = L_q + \rho = 0.25 + 0.5 = 0.75 \text{ Kundinnen}$$

$$TC_{ATM} = 15 \frac{\text{CHF}}{h * \text{Kundinnen}} * 0.75 + 1 * 0 \frac{\text{CHF}}{h} = 11.25 \frac{\text{CHF}}{h}$$



## Aufgabe 3 – Lösung/3

Somit belaufen sich die Gesamtkosten auf:

$$TC = TC_{Schalter} + TC_{ATM} = 25 \frac{CHF}{h} + 11.25 \frac{CHF}{h} = 36.25 \frac{CHF}{h}$$

Ein Vergleich zwischen a) und b) zeigt auf, dass der ATM anstelle eines zweiten Schalters die billigere Variante ist.



## Aufgabe 4 – Lösung/1

- a) Ausgehend von einem M/M/1-Modell werden zunächst  $\lambda$  und  $\mu$  bestimmt sowie  $\rho$  berechnet. Da sich die Kundinnen auf die beiden Schalter aufteilen, ergibt sich pro Schalter eine Ankunftsrate von:

$$\lambda = 20 \frac{\text{Kundinnen}}{h}$$

$$\mu = \frac{3600 \text{ sek}/h}{72 \text{ sek}} = 50 \frac{\text{Kundinnen}}{h}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20 \text{ Kundinnen}/h}{50 \text{ Kundinnen}/h} = 0.4$$

Daraus kann nun die Anzahl Kundinnen im System (Schalter) berechnet werden:

$$L_S = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{50 - 20} = 0.67 \text{ Kundinnen}$$

Woraus sich eine Anzahl von 1.33 Kundinnen für beide Schalter ergibt.



## Aufgabe 4 – Lösung/2

b) Nun wird von einem M/M/c-Modell mit  $c=2$  ausgegangen. Die ankommenden Kundinnen bilden nur noch eine Warteschlange.

$$\lambda = 40 \text{ Kundinnen/h}$$

$$\mu = \frac{3600 \text{ sek/h}}{72 \text{ sek}} = 50 \frac{\text{Kundinnen}}{\text{h}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40 \text{ Kundinnen/h}}{50 \text{ Kundinnen/h}} = 0.8$$

Die Warteschlange verkürzt sich auf (siehe Tabelle Seite 11 Aufgabenstellung):

$$L_q = L_s - \rho$$

$$L_s = L_q + \rho = 0.152 + 0.8 = 0.952 \text{ Kundinnen}$$

Vergleich: Bei b) sind weniger Kundinnen im System, da sie in a) die Schlangen nicht wechseln dürfen und es daher sein kann, dass ein Server nicht ausgelastet ist.



## Aufgabe 5 – Lösung

Es wird mit einem M/M/1-Modell gerechnet, wobei zunächst der Auslastungsgrad berechnet wird. Die Ankunftsrate  $\lambda$  beträgt *2 Kundinnen/h*, während sich die Servicerate  $\mu$  auf *4 Kundinnen/h* beläuft.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2 \text{ Kundinnen/h}}{4 \text{ Kundinnen/h}} = 0.5$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich 3 (1 beim Schneiden + 2 auf den Stühlen) oder mehr Kundinnen im System befinden und somit die zusätzlich ankommenden stehend warten müssen, beläuft sich auf:

$$P(n \geq 3) = \rho^3 = 0.5^3 = 0.125 = 12.5\%$$



## Aufgabe 6 – Lösung

Bei einem  $M/G/\infty$ -Modell muss kein Antragsteller warten, da es unendlich viele “Server” gibt. Die Länge der Warteschlange entspricht folglich  $L_q = 0$ .

## Aufgabe 7 – Lösung/1

a)

M/M/1	2010	2011
$\lambda$	1.8	3.9
$\mu$	4	4
s	1	1
$\rho$	45 %	97.50 %
$P_0$	0.55	
$L_q$	0.3682	38.0250
$L_s$	0.8182	
$W_q$	0.2045	9.7500
$W_s$	0.4545	
$P(n \geq 1)$	0.45	

Auslastungsgrad:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1.8}{4} = 0.45 = 45\%$$

Wahrscheinlichkeit, dass sich keine Kundin im System befindet:

$$\begin{aligned} P_0 &= \rho^0(1 - \rho) \\ &= 0.45^0(1 - 0.45) = 0.55 \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit, dass eine Kundin warten muss:

$$P(n \geq 1) = \rho^1 = 0.45^1 = 0.45$$

## Aufgabe 7 – Lösung/2

a)

M/M/1	2010	2011
$\lambda$	1.8	3.9
$\mu$	4	4
s	1	1
$\rho$	45 %	97.50%
$P_0$	0.55	0.025
$L_q$	0.3682	38.0250
$L_s$	0.8182	39
$W_q$	0.2045	9.7500
$W_s$	0.4545	10
$P(n \geq 1)$	0.45	0.975

Wahrscheinlichkeit, dass sich keine Kundin im System befindet:

$$P_0 = \rho^0(1 - \rho) = 0.975^0(1 - 0.975) = 0.025$$

Durchschnittliche Anzahl an Kundinnen im System:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3.9}{4 - 3.9} = 39$$

Durchschnittliche Wartezeit in Tagen:

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{4 - 3.9} = 10 \text{ Tage}$$

Wahrscheinlichkeit, dass eine Kundin warten muss:

$$P(n \geq 1) = \rho^1 = 0.975^1 = 0.975$$



## Aufgabe 7 – Lösung/3

- b) Die Servicerate bleibt konstant, also ist die Kritik an der Arbeitsleistung der Mitarbeiterin ungerechtfertigt.